Two-way partitioning problem.

$W \in S^n$

$$x^T W x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

$$\text{s.t. } x_i^2 = 1,\ i = 1, \dots, n$$

бюджетное мн-во: 2^n точек

X

+1	−1	−1	+1	−1	−1

W_{ij} – стоимость нахождения i, j в одной группе

$-W_{ij}$ – стоимость нахождения i, j в разных группах

$$\sum_{i,j} x_i \cdot W_{ij} \cdot x_j .$$

$$2^{10} \simeq 10^3$$

$n \geq 30$ уже очень долго $\sim 10^{80}$ частиц во вселенной

$$\sim 10^{81} = (10^3)^{27} = (2^{10})^{27} \simeq 2^{270} .$$

Lagrange: $$L(x, \nu) = x^T W x + \sum_{i=1}^{n} \nu_i (x_i^2 - 1) =$$

$$= x^T (W + \mathrm{diag}(\nu)) x - 1^T \cdot \nu .$$

Dual function: $$g(\nu) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \nu) = \begin{cases} -1^T \nu, & W + \mathrm{diag}(\nu) \succeq 0 \\ -\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теперь мы имеем нижнюю оценку на задачу. $p^* \geq g(\nu)$

Например, $$\underbrace{\hat{\nu} = -\lambda_{min}(W) \cdot 1}_{} \Rightarrow g(\hat{\nu}) = +1^T \cdot \lambda_{min}(W) \cdot 1 =$$ $\hat{\nu} \in \mathbb{R}^n$, $1 \in \mathbb{R}^n$

$$= n \cdot \lambda_{min}(W)$$

$$W - \lambda_{min}(W) \cdot I \succeq 0 \qquad W = S \Lambda S^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^T$$

$$x^T (W - \lambda_{min}(W) \cdot I) x \Rightarrow x^T W x - \lambda_{min} \cdot x^T x \geq \qquad \mathrm{diag}(\lambda)$$

$$=$$

$$x^T W x - \lambda_{\min} \cdot x^T x \geqslant 0 \quad \Big| : x^T x \neq 0$$

$$\frac{x^T W x}{x^T x} - \lambda_{\min} \geqslant 0$$

$$\lambda_{\min} \leqslant \frac{x^T W x}{x^T x}$$

Теорема: соотношение Релэя:

$$\lambda_{\min} \leqslant \frac{x^T W x}{x^T x} \leqslant \lambda_{\max}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

всегда, когда существует спектральное разложение

$$Wx = \lambda x \quad \Big| \; x^T$$

$$x^T W x = \lambda x^T x.$$

$$\boxed{p^* \geqslant n \cdot \lambda_{\min}(W)}$$

$$\boxed{p^* = x^{*T} W x^*}$$

Business

$f_0(x)$ – стоимость функционирования бизнеса

x – действия бизнесмэна.

$-f_0(x)$ – прибыль

$f_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, \dots m$ – ограничения (налоги, выбросы, пенсии и т.д.)

$$\min f_0(x)$$
$$f_i(x) \leqslant 0$$

правила нарушать можно

$\lambda_i \geqslant 0$ за нарушение правила $f_i(x) \leqslant 0$

правила нарушать нельзя,

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i(x)$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – действия бизнесмэна

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ – штрафы

$$g(\lambda) = \inf_x L(x, \lambda)$$

оптимальная прибыль бизнесмэна для штрафов λ

Dual Problem: $d^* = \sup\limits_{\lambda \geq 0} g(\lambda)$

λ_i^* – shadow prices
теневая цена
за нарушение
i-ого ограничения.

d^* – лучшая „прибыль", которую может показать бизнесмэн при худших штрафах

Связь между двойственностями Лагранжа и Фенхеля

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \longrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

$$\text{s.t. } a^T x = b. \qquad a \in \mathbb{R}^n$$

dom f_0 ∩ dom огр.

• Построить двойственную задачу.

1) $L(x,\nu) = \sum\limits_{i=1}^n f_i(x_i) + \nu(a^T x - b)$

2) $g(\nu) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,\nu) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \sum\limits_{i=1}^n \left(f_i(x_i) + \nu a_i x_i\right) - \nu b \circleddash$

$\circleddash \sum\limits_{i=1}^n \underbrace{\inf\limits_{x_i}\left(f_i(x_i) + \nu a_i x_i\right)}_{\text{напоминает } f^*} - \nu b \circleddash$

$f^*(\nu a_i) = \sup\limits_{x_i}\left(\nu a_i x_i - f_i(x_i)\right)$

$f^*(-\nu a_i) = \sup\limits_{x_i}\left(-\nu a_i x_i - f_i(x_i)\right)$

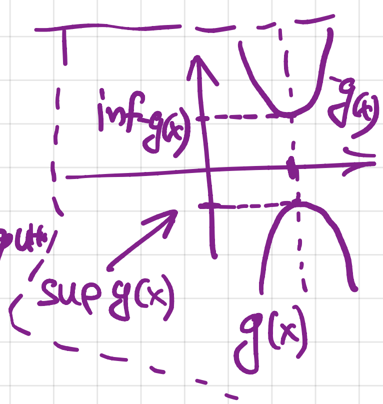
$f^*(-\nu a_i) = -\inf\limits_{x_i}\left(f_i(x_i) + \nu a_i x_i\right)$

$\circleddash \sum\limits_{i=1}^n \left[-f^*(-\nu a_i)\right] - \nu b.$

3) Dual Problem: $-\nu b - \sum\limits_{i=1}^n f^*(-\nu a_i) \to \max\limits_{\nu \in \mathbb{R}}$

если f_i – строго выпуклые, оказывается решение x^* – единств.

$\Rightarrow \nabla_x L = 0 \Rightarrow \boxed{f_i'(x_i) = -\nu^* a_i}$



Пример выпуклой задачи, в которой нет сильной двойственности:

$$\min e^{-x} \quad \leftarrow \text{выпукла}$$
$$\text{s.t. } \frac{x^2}{y} \le 0 \quad \leftarrow \text{выпукло}$$

$$D = \{(x,y) \mid y > 0\} = \operatorname{dom} f_0(x,y)$$

1) $p^* = ?$ $\quad p^* = 1 \quad x^* = 0.$

2) $d^* = ?$ $\quad L(x,y,\lambda) = e^{-x} + \lambda \frac{x^2}{y}$

$$g(\lambda) = \inf_{(x,y)\in D} L(x,y,\lambda) = \inf_{x,y>0} \Big(e^{-x} + \lambda \underbrace{\frac{x^2}{y}}_{\ge 0}\Big) = \begin{cases} -\infty, & \lambda < 0 \\ 0 & \lambda \ge 0 \end{cases}$$

$x \to \infty$
$y \to \to \infty$
$\frac{x^2}{y} \to 0$

$d^* = 0$ $\qquad \boxed{0 \longrightarrow \max_{\lambda \ge 0}}$

Duality gap: $p^* - d^* = 1 > 0 \Rightarrow$ нет сильной двойств.

Условие Слейтера не выполнено.

3) Возмутим задачу: $\quad \min e^{-x} \quad \text{s.t. } \frac{x^2}{y} \le u \quad \Rightarrow p^*(u) = ?$

парам.

$$L(x,y,\lambda,u) = e^{-x} + \lambda\left(\frac{x^2}{y} - u\right)$$

$$\nabla_x L = 0 \Rightarrow e^{-x}\cdot(-1) + \lambda\cdot\frac{2x}{y} = 0 \Rightarrow e^{-x} = 2\lambda\cdot\frac{x}{y}$$

$$\nabla_y L = 0 \Rightarrow 0 - \lambda\frac{1}{y^2}\cdot x^2 = 0 \Rightarrow \lambda\frac{x^2}{y^2} = 0$$

$\lambda = 0$ $\qquad \lambda > 0$

. . . .

$$\boxed{p^*(u) \ge p^*(0) - \lambda^* \cdot u}$$