Выпуклые мн-ва, содержащие ноль, имеют двойственную природу.
Их можно задать двумя способами

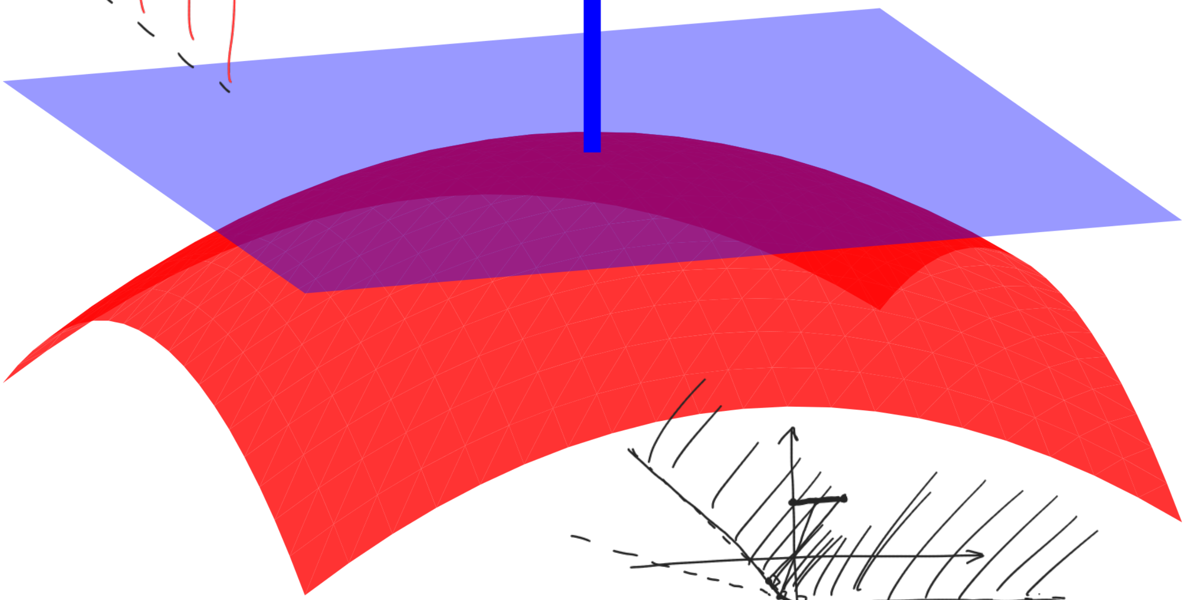
# Conjugate set

## Conjugate (dual) set

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - произвольное непустое множество. Тогда сопряженное к нему множество определяется, как:

$$
\boxed{S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \ge -1 \;\; \forall x \in S\}}
$$

Примеры



## Double conjugate set

Множество $S^{**}$ называется вторым сопряженным к множеству $S$, если:

$$
S^{**} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \ge -1 \;\; \forall x \in S^*\}
$$

## Inter-conjugate and self-conjugate sets

* Множества $S_1$ и $S_2$ называются **взаимосопряженными**, если $S_1^* = S_2, S_2^* = S_1$.
* Множество $S$ называется **самосопряженным**, если $S^* = S$

сопряжен к $O = \mathbb{R}^n$

## Properties

* Сопряженное множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
* Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$
S^{**} = \overline{\mathbf{conv}(S \cup \{0\})}
$$

$S^{**} = S$

* Если $S_1 \subset S_2$, то $S_2^* \subset S_1^*$
* $\left(\bigcup\limits_{i=1}^m S_i\right)^* = \bigcap\limits_{i=1}^m S_i^*$

Т.е. если $S$ = шарик $\frac{1}{x}$, $S^*$ = шарик $\frac{1}{x}$

единичный шарик - самосопряженное мн-во

- Если $S$ - замкнуто, выпукло, включает $0$, то $S^{**} = S$
- $S^* = \left(\overline{S}\right)^*$

## Examples

### 1

Доказать, что $S^* = \left(\overline{S}\right)^*$

$\overline{S} = cl(S)$

$A = B \quad \forall a \in A \quad a \in B$

$A \subseteq B$

$B \subseteq A \quad \forall b \in B \to b \in A$

Решение:

1) $S \subseteq \overline{S} \Rightarrow \left(\overline{S}\right)^* \subseteq S^*$

2) $\forall p \in S^*$ докажем, что $p \in \left(\overline{S}\right)^*$

Возьмём $x_0 \in \overline{S} : \langle p, x_0 \rangle \geq -1$

$x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$

$x_k \in S$

т.к. $f(x) = p^T x = \langle p, x \rangle$ непрерывная функция

потому что

$p^T x_k \geq -1 \Rightarrow p^T x_0 \geq -1 \Rightarrow p \in \left(\overline{S}\right)^*$.

### 2

Доказать, что $(\mathbf{conv}(S))^* = S^*$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

Решение:

### 3

Доказать, что если $B(0, r)$ - шар радиуса $r$ по некоторой норме с центром в нуле, то $(B(0, r))^* = B(0, 1/r)$

$\mathbb{R}^n$

$B(0,r) = X$

$B(0,\frac{1}{r}) = Y$

$X^* = Y$

Решение:

① $X^* \subseteq Y$ $\quad \forall p \in X^*$ $\quad p \in (B(0,r))^*$ $\quad p^T x \geq -1 \quad x \in X$

доказать, что $p \in Y$

$|p^T x| \leq \|p\| \cdot \|x\|$ $\quad \|x\| \leq r$

$-1 \quad 0$

$p^T x \geq -1$

$\|p\| \leq \frac{1}{r}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\|p\|}_{\leq \frac{1}{r}} \underbrace{\|x\|}_{\leq r} \leq 1$ $\qquad \frac{1}{r} \cdot r \leq 1$

$\Rightarrow p \in B(0, \frac{1}{r})$ $\qquad$ OK

② $Y \subset X^*$ $\quad \forall y \in Y \Rightarrow y \in X^*$

$x \in X$

$\|y\| \leq \frac{1}{r}$ $\qquad |\underbrace{y^T}_{\leq \frac{1}{r}} \underbrace{x}_{\leq r}| \leq 1 \Rightarrow y^T x \geq -1$

## Dual cones

Сопряженным конусом к конусу $K$ называется такое множество $K^*$, что:

$K = \{x \in K : \alpha x \in K\}$

$\alpha \geq 0$

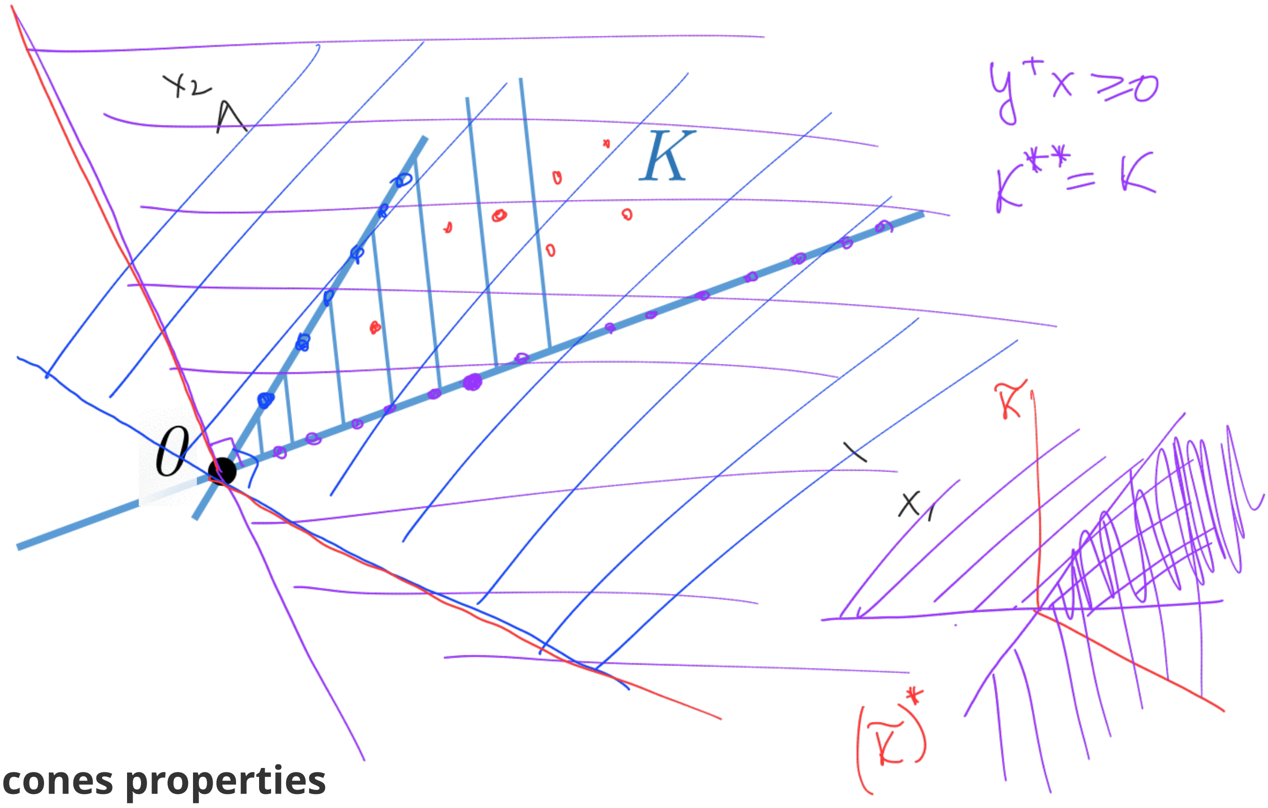
$$\boxed{K^* = \{y \mid \langle x, y\rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}}$$

Чтобы показать, что это определение непосредственно следует из теории выше вспомним, что такое сопряженное множество и что такое конус $\forall \lambda > 0$

$$\{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -1 \ \ \forall x \in S\} \to \{\lambda y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -\frac{1}{\lambda} \ \ \forall x \in S\}$$

$\Rightarrow \langle y, \lambda x\rangle \geq -1 \ K$ $\qquad \lambda \to \infty$

$\langle y, x\rangle \geq -\frac{1}{\lambda}$




## Dual cones properties

- Если $K$ - замкнутый выпуклый конус. Тогда $K^{**} = K$
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и конуса $K \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$(S+K)^* = S^* \cap K^*$$

- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$, тогда:

$$\left(\sum_{i=1}^m K_i\right)^* = \bigcap_{i=1}^m K_i^*$$

- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$. Пусть так же, их пересечение имеет внутреннюю точку, тогда:

$$\left(\bigcap_{i=1}^m K_i\right)^* = \sum_{i=1}^m K_i^*$$

## Examples

### 4

Найти сопряженнй конус для монотонного неотрицательного конуса:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0\}$$

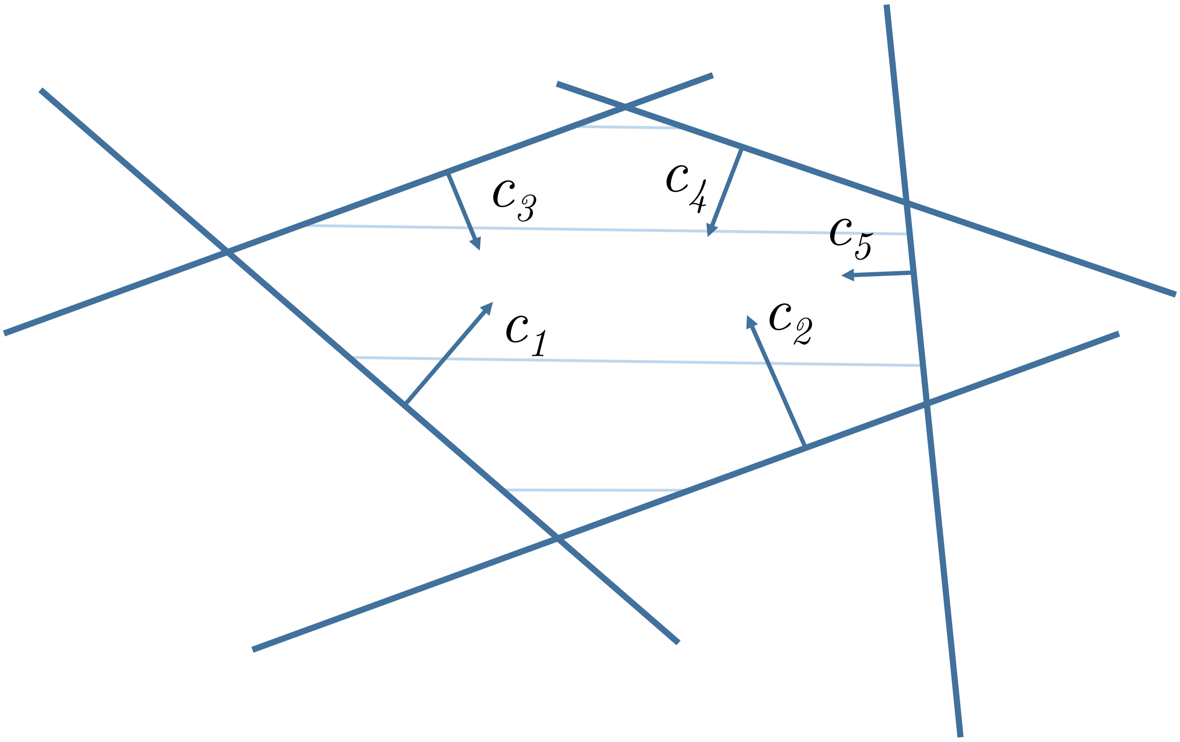
Решение:

## Polyhedra

Множество решений системы линейных неравенств и равенств представляет собой многогранник:

$$Ax \preceq b, \quad Cx = d$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, а неравенство - поэлементное.




**Теорема:**

Пусть $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к многогранному множеству:

$$S = \mathbf{conv}(x_1, \ldots, x_k) + \mathbf{cone}(x_{k+1}, \ldots, x_m)$$

является полиэдр (многогранник):

$$S^* = \left\{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1,k}; \langle p, x_i \rangle \geq 0, i = \overline{k+1,m}\right\}$$

**Доказательство:**

- Пусть $S = X, S^* = Y$. Возьмем некоторый $p \in X^*$, тогда $\langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1, k}$. В то же время для любых $\theta > 0, i = \overline{k+1, m}$:

$$\langle p, x_i \rangle \geq -1 \rightarrow \langle p, \theta x_i \rangle \geq -1$$

$$\langle p, x_i \rangle \geq -\frac{1}{\theta} \rightarrow \langle p, x_i \rangle \geq 0$$

  Значит, $p \in Y \rightarrow X^* \subset Y$

- Пусть, напротив, $p \in Y$. Для любой точки $x \in X$:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$$

  Значит:

$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \langle p, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \langle p, x_i \rangle + \sum_{i=k+1}^{m} \theta_i \langle p, x_i \rangle \geq \sum_{i=1}^{k} \theta_i (-1) + \sum_{i=1}^{k} \theta_i \cdot 0 = -1$$

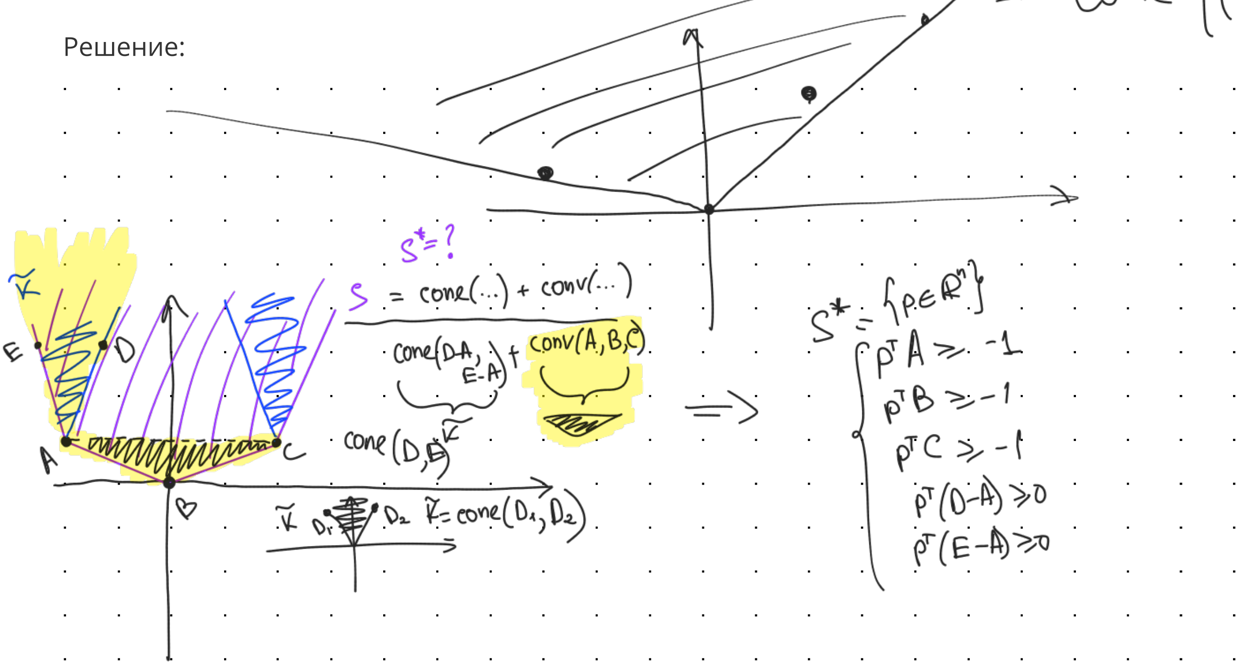
  Значит, $p \in X^* \rightarrow Y \subset X^*$

## 5

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$$S = \mathbf{cone}\left\{(-3, 1), (2, 3), \cancel{(4, 5)}\right\} = cone\left\{(-3,1), (4,5)\right\}$$

Решение:




## Лемма (теорема) Фаркаша (Фаркаша - Минковского)

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1) \ Ax = b, x \geq 0$$

$$2) \ pA \geq 0, \langle p, b \rangle < 0$$

$Ax = b$ при $x \geq 0$ означает, что $b$ лежит в конусе, натянутым на столбцы матрицы $A$

$pA \geq 0, \ \langle p, b \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором $b$ и конусом из столбцов матрицы $A$.

**Следствие:**

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1)\ Ax \le b$$

$$2)\ pA = 0, \langle p, b \rangle < 0, p \ge 0$$

Если в задаче линейного программирования на минимум допустимое множество непусто и целевая функция ограничена на нём снизу, то задача имеет решение.