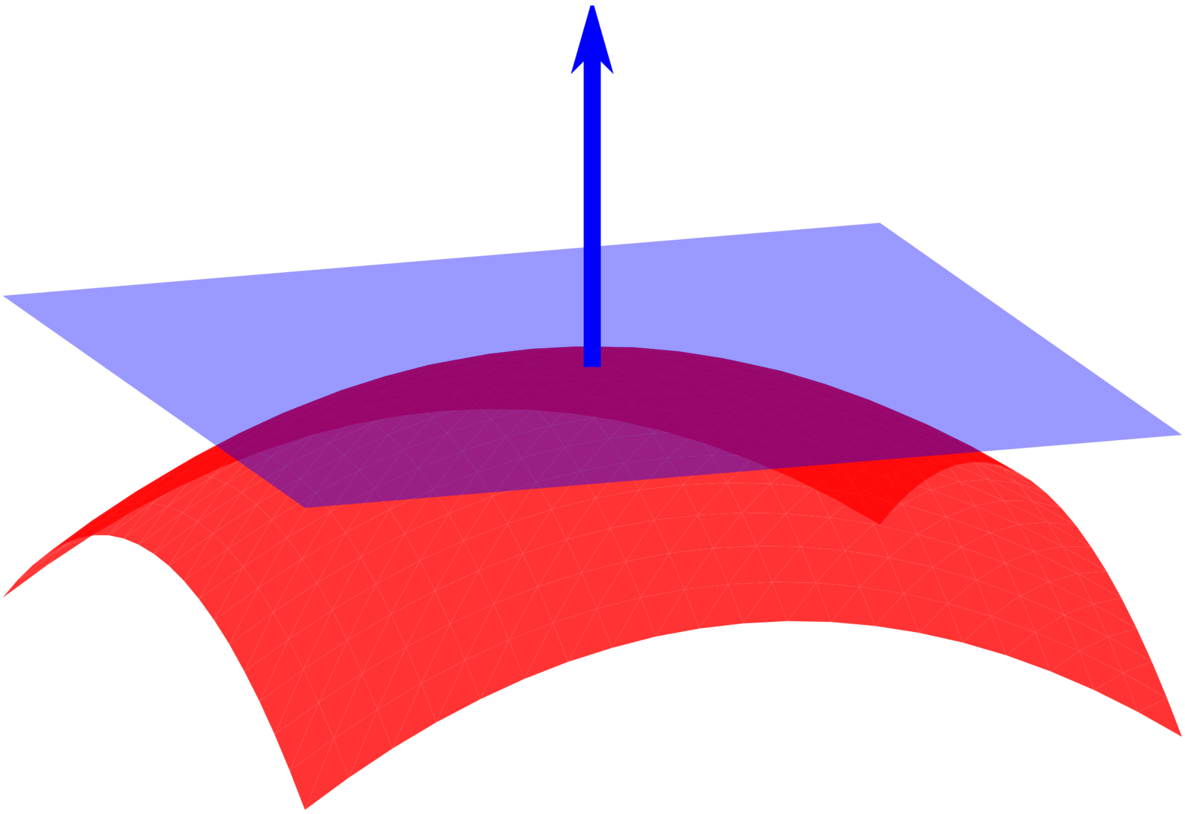
Conjugate set

Conjugate (dual) set

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - произвольное непустое множество. Тогда сопряженное к нему множество определяется, как:

$$S^* = \{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -1 \ \ \forall x \in S\}$$



Double conjugate set

Множество S^{**} называется вторым сопряженным к множеству S, если:

$$S^{**} = \{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -1 \ \ \forall x \in S^*\}$$

Inter-conjugate and self-conjugate sets

- Множества S_1 и S_2 называются **взаимосопряженными**, если $S_1^* = S_2, S_2^* = S_1$.
- Множество S называется **самосопряженным**, если $S^* = S$

Properties

- Сопряженное множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$S^{**} = \overline{\mathbf{conv}(S \cup \{0\})}$$

- Если $S_1 \subset S_2$, то $S_2^* \subset S_1^*$
- $\left(\bigcup\limits_{i=1}^m S_i \right)^* = \bigcap\limits_{i=1}^m S_i^*$

- Если S - замкнуто, выпукло, включает 0, то $S^{**} = S$
- $S^* = \left(\overline{S}\right)^*$

Examples

1

Доказать, что $S^* = \left(\overline{S}\right)^*$

Решение:

2

Доказать, что $(\mathbf{conv}(S))^* = S^*$

Решение:

3

Доказать, что если $B(0, r)$ - шар радиуса r по некоторой норме с центром в нуле, то $(B(0, r))^* = B(0, 1/r)$

Решение:

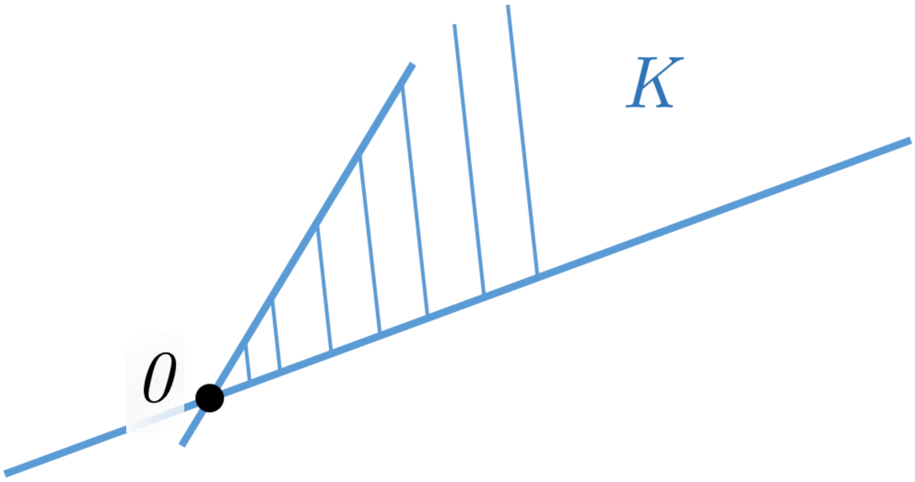
Dual cones

Сопряженным конусом к конусу K называется такое множество K^*, что:

$$K^* = \{y \mid \langle x, y\rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

Чтобы показать, что это определение непосредственно следует из теории выше вспомним, что такое сопряженное множество и что такое конус $\forall \lambda > 0$

$$\{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -1 \ \ \forall x \in S\} \to \{\lambda y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -\frac{1}{\lambda} \ \ \forall x \in S\}$$



Dual cones properties

- Если K - замкнутый выпуклый конус. Тогда $K^{**} = K$
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и конуса $K \subseteq \mathbb{R}^n$:
$$(S+K)^* = S^* \cap K^*$$
- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$, тогда:
$$\left(\sum_{i=1}^m K_i\right)^* = \bigcap_{i=1}^m K_i^*$$
- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$. Пусть так же, их пересечение имеет внутреннюю точку, тогда:
$$\left(\bigcap_{i=1}^m K_i\right)^* = \sum_{i=1}^m K_i^*$$

Examples

4

Найти сопряженнй конус для монотонного неотрицательного конуса:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0\}$$

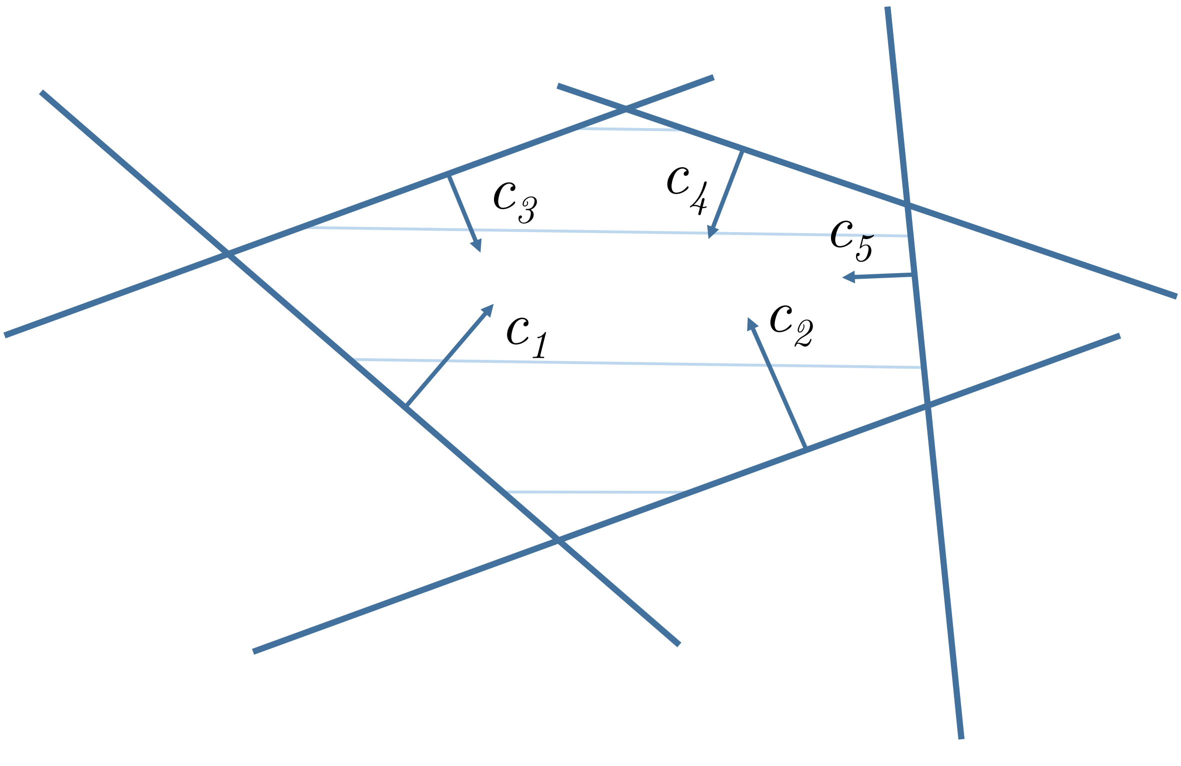
Решение:

Polyhedra

Множество решений системы линейных неравенств и равенств представляет собой многогранник:

$$
Ax \preceq b, \quad Cx = d
$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, а неравенство - поэлементное.



Теорема:

Пусть $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к многогранному множеству:

$$
S = \mathbf{conv}(x_1, \ldots, x_k) + \mathbf{cone}(x_{k+1}, \ldots, x_m)
$$

является полиэдр (многогранник):

$$
S^* = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1,k}; \langle p, x_i \rangle \geq 0, i = \overline{k+1, m} \right\}
$$

Доказательство:

- Пусть $S = X, S^* = Y$. Возьмем некоторый $p \in X^*$, тогда $\langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1,k}$. В то же время для любых $\theta > 0, i = \overline{k+1,m}$:

$$\langle p, x_i \rangle \geq -1 \to \langle p, \theta x_i \rangle \geq -1$$
$$\langle p, x_i \rangle \geq -\frac{1}{\theta} \to \langle p, x_i \rangle \geq 0$$

  Значит, $p \in Y \to X^* \subset Y$

- Пусть, напротив, $p \in Y$. Для любой точки $x \in X$:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i \qquad \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$$

  Значит:

$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \langle p, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \theta_i \langle p, x_i \rangle + \sum_{i=k+1}^{m} \theta_i \langle p, x_i \rangle \geq \sum_{i=1}^{k} \theta_i (-1) + \sum_{i=1}^{k} \theta_i \cdot 0 = -1$$

  Значит, $p \in X^* \to Y \subset X^*$

5

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$$S = \textbf{cone} \left\{(-3, 1), (2, 3), (4, 5)\right\}$$

Решение:

Лемма (теорема) Фаркаша (Фаркаша - Минковского)

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1) \ Ax = b, x \geq 0$$

$$2) \ pA \geq 0, \langle p, b \rangle < 0$$

$Ax = b$ при $x \geq 0$ означает, что b лежит в конусе, натянутым на столбцы матрицы A

$pA \geq 0, \ \langle p, b \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором b и конусом из столбцов матрицы A.

Следствие:

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1)\ Ax \leq b$$

$$2)\ pA = 0, \langle p, b \rangle < 0, p \geq 0$$

Если в задаче линейного программирования на минимум допустимое множество непусто и целевая функция ограничена на нём снизу, то задача имеет решение.