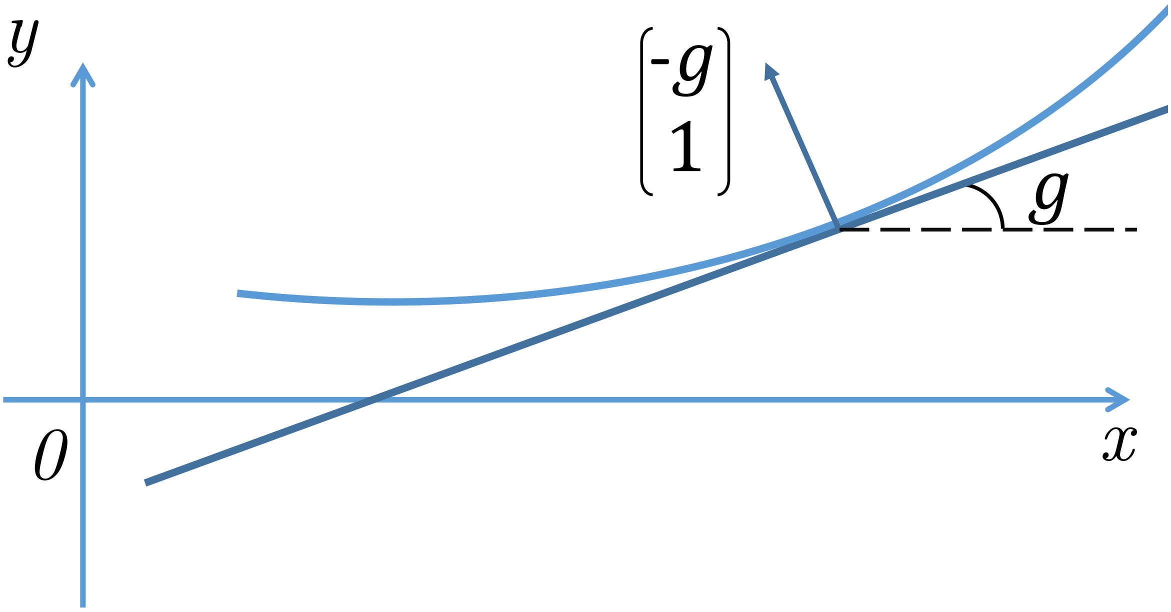
Subgradient and subdifferential

Motivation

Важным свойством непрерывной выпуклой функции $f(x)$ является то, что в выбранной точке x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполнено неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g, то есть касательная к графику функции является *глобальной* оценкой снизу для функции.



- Если $f(x)$ - дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы :)

Не хочется лишаться такого вкусного свойства.

Subgradient

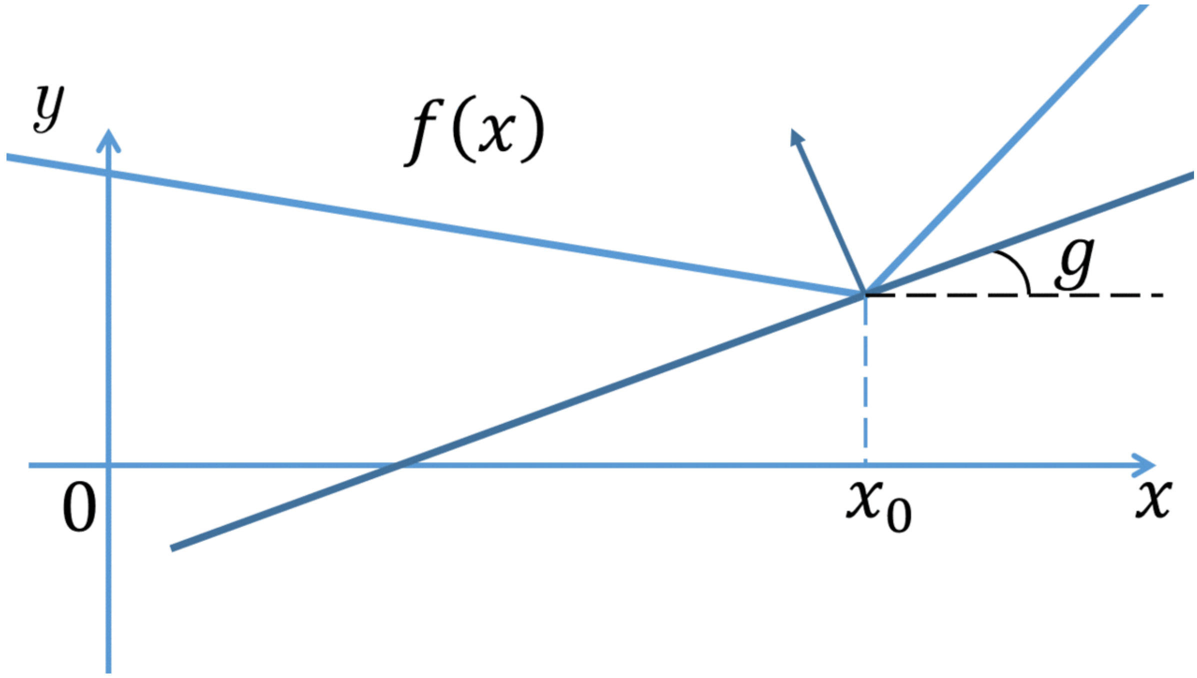
Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Subdifferential

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** f в x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

- Если $x_0 \in \mathbf{ri} S$, то $\partial f(x_0)$ выпуклое компактное множество.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 $\iff$ $\partial f(x_0) = \nabla f(x_0)$
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ - выпукла на S.



Moreau - Rockafellar theorem (subdifferential of a linear combination)

Пусть $f_i(x)$ - выпуклые функции на выпуклых множествах $S_i,\ i = \overline{1,n}$.
Тогда, если $\bigcap\limits_{i=1}^n \mathbf{ri} S_i \neq \emptyset$ то функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^n a_i f_i(x),\ a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap\limits_{i=1}^n S_i$ и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x)$$

Dubovitsky - Milutin theorem (subdifferential of a point-wise maximum)

Пусть $f_i(x)$ - выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n,\ x_0 \in S$, а поточечный максимум определяется как $f(x) = \max\limits_i f_i(x)$. Тогда:

$$\partial_S f(x_0) = \mathbf{conv} \left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_S f_i(x_0) \right\},$$

где $I(x) = \{i \in [1:m] : f_i(x) = f(x)\}$

Chain rule for subdifferentials

Пусть $g_1, \ldots, g_m$ - выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $g = (g_1, \ldots, g_m)$ - образованная из них вектор - функция, φ - монотонно неубывающая выпуклая функция на открытом выпуклом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^m$, причем $g(S) \subseteq U$. Тогда субдифференциал функции $f(x) = \varphi\left(g(x)\right)$ имеет вид:

$$\partial f(x) = \bigcup_{p \in \partial \varphi(u)} \left(\sum_{i=1}^m p_i \partial g_i(x) \right),$$

где $u = g(x)$

В частности, если функция φ дифференцируема в точке $u = g(x)$, то формула запишется так:

$$\partial f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u) \partial g_i(x)$$

Subdifferential calculus

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$, for $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i - выпуклые функции
- $\partial(f(Ax+b))(x) = A^T \partial f(Ax+b)$, f - выпуклая функция

Examples

Концептуально, различают три способа решения задач на поиск субградиента:

- Теоремы Моро - Рокафеллара, композиции, максимума
- Геометрически
- По определению

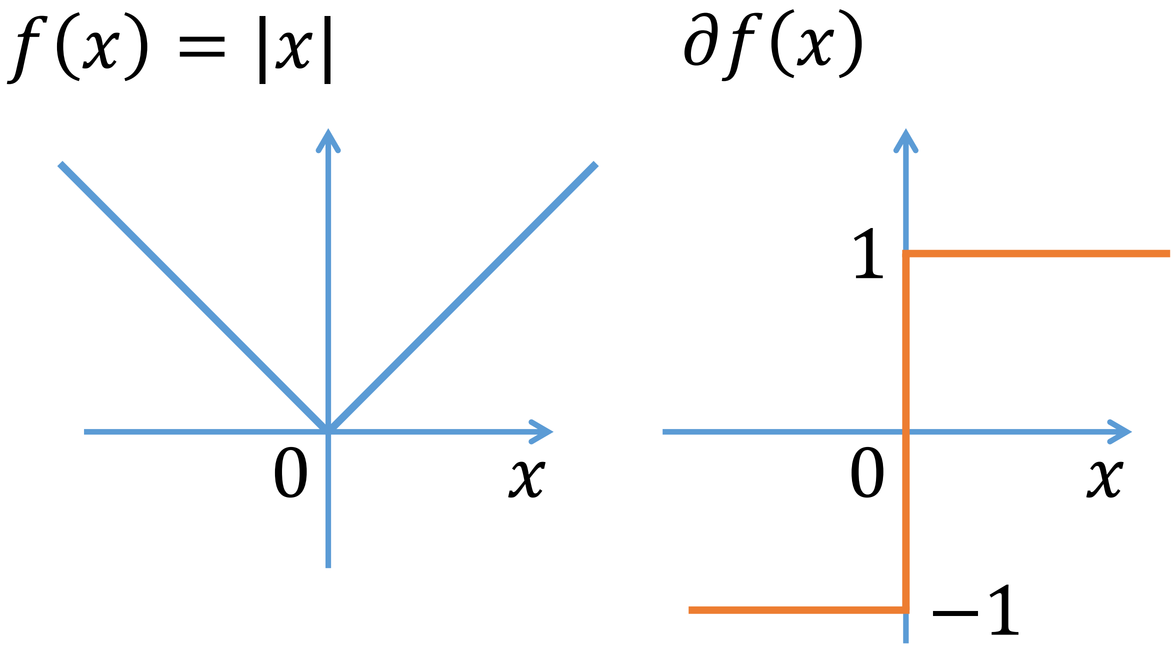
1

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$

Решение:

Решить задачу можно либо геометрически (в каждой точке числовой прямой указать угловые коэффициенты прямых, глобально подпирающих функцию снизу), либо по теореме Моро - Рокафеллара, рассмотрев $f(x)$ как композицию выпуклых функций:

$$f(x) = \max\{-x, x\}$$



2

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = |x-1| + |x+1|$

Решение:

Совершенно аналогично применяем теорему Моро - Рокафеллара, учитывая следующее:

$$\partial f_1(x) = \begin{cases} -1, & x < 1 \\ [-1;1], & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \qquad \partial f_2(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ [-1;1], & x = -1 \\ 1, & x > -1 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\partial f(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ [-2;0], & x = -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ [0;2], & x = 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

3

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = [\max(0, f_0(x))]^q$. Здесь $f_0(x)$ - выпуклая функция на открытом выпуклом множестве S, $q \geq 1$.

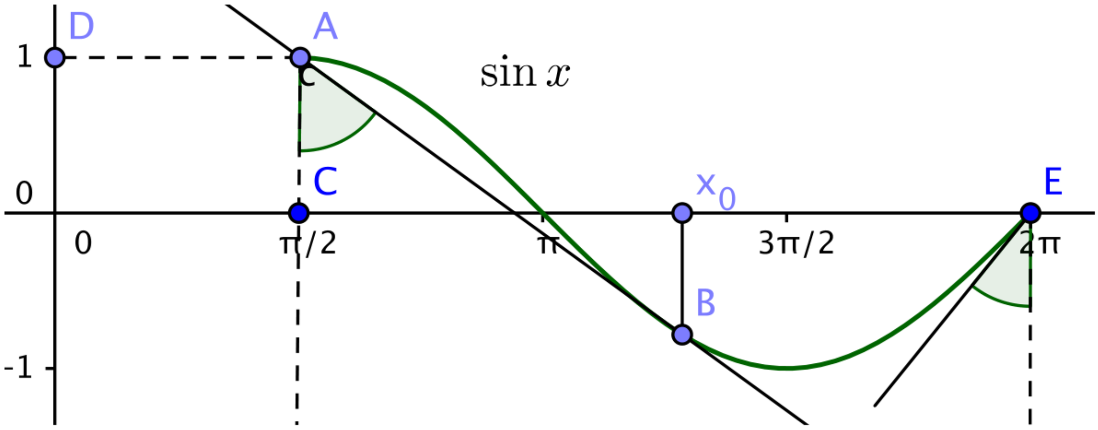
Решение:
Согласно теореме о композиции (функция $\varphi(x) = x^q$ - дифференцируема), а $g(x) = \max(0, f_0(x))$ имеем: $\partial f(x) = q(g(x))^{q-1}\partial g(x)$

По теореме о поточечном максимуме:

$$
\partial g(x) = \begin{cases} \partial f_0(x), \quad f_0(x) > 0, \\ \{0\}, \quad f_0(x) < 0 \\ \{a \mid a = \lambda a',\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ a' \in \partial f_0(x)\}, \quad f_0(x) = 0 \end{cases}
$$

4

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \sin x$, $x \in [\pi/2; 2\pi]$



$$
\partial f_G(x) = \begin{cases} (-\infty, \cos x_0], & x = \pi/2; \\ \varnothing, & x \in (\pi/2, x_0); \\ \cos x, & x \in [x_0, 2\pi); \\ [1, +\infty], & x = 2\pi. \end{cases}
$$

5

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = |c_1^\top x| + |c_2^\top x|$

Решение: Пусть $f_1(x) = |c_1^\top x|$, а $f_2(x) = |c_2^\top x|$. Так как эти функции выпуклы, субдифференциал их суммы равен сумме субдифференциалов. Найдем каждый из них:

$$
\partial f_1(x) = \partial \left(\max\{c_1^\top x, -c_1^\top x\} \right) = \begin{cases} -c_1, & c_1^\top x < 0 \\ \mathbf{conv}(-c_1; c_1), & c_1^\top x = 0 \\ c_1, & c_1^\top x > 0 \end{cases}
$$

$$
\partial f_2(x) = \partial \left(\max\{c_2^\top x, -c_2^\top x\} \right) = \begin{cases} -c_2, & c_2^\top x < 0 \\ \mathbf{conv}(-c_2; c_2), & c_2^\top x = 0 \\ c_2, & c_2^\top x > 0 \end{cases}
$$

Далее интересными представляются лишь различные взаимные расположения векторов c_1 и c_2, рассмотрение которых предлагается читателю.

6

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \|x\|_1$

Решение: По определению

$$
\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n
$$

Рассмотрим эту сумму как поточечный максимум линейных функций по x: $g(x) = s^\top x$, где $s_i = \{-1, 1\}$. Каждая такая функция однозначно определяется набором коэффициентов $\{s_i\}_{i=1}^n$.

Тогда по теореме Дубовицкого - Милютина, в каждой точке $\partial f = \mathbf{conv}\left(\bigcup\limits_{i \in I(x)} \partial g_i(x)\right)$

Заметим, что $\partial g(x) = \partial \left(\max\{s^\top x, -s^\top x\}\right) = \begin{cases} -s, & s^\top x < 0 \\ \mathbf{conv}(-s; s), & s^\top x = 0 \\ s, & s^\top x > 0 \end{cases}$.

Причем, правило выбора "активной" функции поточечного максимума в каждой точке следующее:

- Если j-ая координата точки отрицательна, $s_i^j = -1$
- Если j-ая координата точки положительна, $s_i^j = 1$
- Если j-ая координата точки равна нулю, то подходят оба варианта коэффициентов и соответствующих им функций, а значит, необходимо включать субградиенты этих функций в объединение в теореме Дубовицкого - Милютина.

В итоге получаем ответ:

$$\partial f(x) = \{g \; : \; \|g\|_\infty \leq 1, \quad g^\top x = \|x\|_1\}$$

References

- [Lecture Notes for ORIE 6300: Mathematical Programming I by Damek Davis]